**UNIDAD VI**

**INTEGRACIÓN Y DIFERENCIACIÓN NUMÉRICA**

Contenido

[VI INTEGRACIÓN Y DIFERENCIACIÓN NUMÉRICA 3](#_Toc24530335)

[6.1. Comentarios 3](#_Toc24530336)

[6.2. Método de Newton Cotes 5](#_Toc24530337)

[6.2.1 Método Trapezoidal 6](#_Toc24530338)

[Error de la regla del trapecio 8](#_Toc24530339)

[*Ejemplo:* 9](#_Toc24530340)

[6.2.2 Método de Simpson. 10](#_Toc24530341)

[Error de truncamiento, 12](#_Toc24530342)

[Ejemplo 12](#_Toc24530343)

[Ejemplos: 13](#_Toc24530344)

[6.2.3 Métodos Compuestos de Integración 14](#_Toc24530345)

[6.2.4 Ejercicios Resueltos 15](#_Toc24530346)

[Algoritmo del método Trapezoidal 16](#_Toc24530347)

[Método Compuesto de Simpson 16](#_Toc24530348)

[Algoritmo del Método de Simpson Compuesto 19](#_Toc24530349)

[6.2.4 Extrapolación de Richardson e Integración de Romberg 20](#_Toc24530350)

[6.3. Cuadratura de Gauss 26](#_Toc24530351)

[6.3.1. Método de coeficientes indeterminados 27](#_Toc24530352)

[6.3.2 Sistematización General. 28](#_Toc24530353)

[Ejemplo. 31](#_Toc24530354)

[Análisis del error en la cuadratura de Gauss 32](#_Toc24530355)

[6.5. Diferenciación numérica 33](#_Toc24530356)

[6.5.1. Sistematización General: 33](#_Toc24530357)

[Observación: 35](#_Toc24530358)

[6.5.2 ejemplos de aplicación resueltos 39](#_Toc24530359)

[6.5.3. Algoritmo. 43](#_Toc24530360)

[6.5.4. Ejercicios y aplicaciones propuestos 43](#_Toc24530361)

[6.5.5. Ejercicios y aplicaciones diversas propuestos 46](#_Toc24530362)

[6.6. Referencias Bibliografía 47](#_Toc24530363)

# 

# VI INTEGRACIÓN Y DIFERENCIACIÓN NUMÉRICA

## 6.1. Comentarios

El análisis numérico es el cálculo matemático del cambio. Como los hombres con inquietudes diverso, los ingenieros se enfrentan ar en forma continua con sistemas y procesos que cambian, se transforman, los métodos numéricos, el cálculo es una herramienta esencial en las diversas profesiones. Y en este marco existen dos conceptos interrelacionados la diferenciación y la integración.

Considerando que, diferenciar significa “marcar por diferencias; distinguir;… percibir la diferencia en o entre”. En las matemáticas, la derivada sirve como el principal vehículo para la diferenciación, representa la razón de cambio de una variable dependiente con respecto a una variable independiente, la definición matemática de la derivada empieza con una aproximación por diferencias:

, (1)

donde y, f(x) son representaciones alternativas de la variable dependiente y x es la variable independiente. Si se hace que Δx se aproxime a cero, como sucede el cociente de las diferencias se convierte en una derivada,

, (2)

El proceso inverso de la diferenciación es la integración. De acuerdo con la definición del diccionario, integrar significa “juntar partes en un todo; unir; indicar la cantidad total ...”. Matemáticamente, la integración se representa por,

. (3)

que representa la integral de la función f(x) con respecto a la variable independiente x, evaluada entre los límites x = a y x = b. La función f(x) en la ecuación (3) se llama

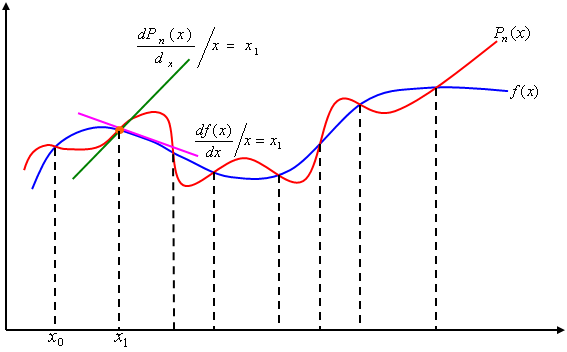
integrando.

En esta oportunidad nuestra atención se direcciona a lo que lo llamaremos integración y diferenciación numérica, recordemos que hasta aquí ya se determinó un polinomio de aproximación que se aproxime satisfactoriamente a una función f(x), en un intervalo, esperando que al diferenciar tal polinomio o integrarlo también se aproxime satisfactoriamente, y que tal integración o derivación se aproxime a la de f(x).

Observamos el esquema

* 1. La integración numérica es utilizada para funciones analíticas o tabulaciones dadas.
  2. En el caso de las funciones tabuladas dados se ha determinado un polinomio de aproximación *Pn* (*x*) en un intervalo de interés, pero su diferenciación e integración presentan discrepancias

***Ejemplo:***

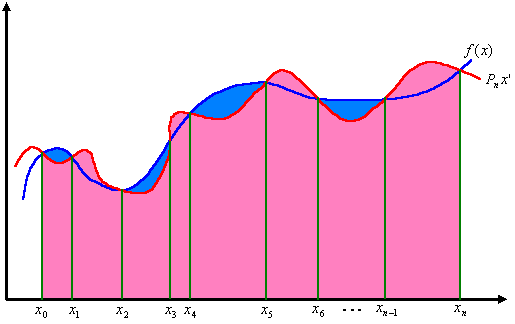


* 1. El proceso de integración esta dado por el área bajo la curva de *f* (*x*)

,

* 1. La integral aproximada está dada por el área bajo la curva *Pn* (*x*),

.



* 1. Los errores que se cometen al integrar los diferentes segmentos, tienden a cancelarse entre sí o reducirlo lo que permite afirmar que el error total al integrar *Pn* (*x*) desde *x*0 a *x*n puede ser muy pequeño; aun cuando *Pn* (*x*) no sea una buena aproximación de *f* (*x*).
  2. Por otro lado que proporciona la pendiente de la recta tangente a *Pn* (*x*) en un punto; puede variar en magnitud respecto a en el mismo punto, aunque *Pn* (*x*) sea una buena aproximación

Los métodos de integración usadas pueden clasificarse en dos grupos:

1. **Fórmulas de Newton Cotes:** Los que usan valores dados de la función *f* (*x*) en abscisas equidistantes.
2. **Fórmulas de Cuadratura Gaussiana:** Los que usan valores de *f* (*x*) en abscisas desigualmente espaciadas determinadas por ciertas propiedades de familias de polinomio ortogonales.

## 6.2. Método de Newton Cotes

Las fórmulas de Newton-Cotes son los tipos de integración numérica más comunes. Se basan en la estrategia de reemplazar una función complicada o datos tabulados por un polinomio de aproximación que es fácil de integrar

.

donde es un polinomio de la forma

-

donde n es el grado del polinomio. Por ejemplo, se puede utilizar un polinomio de primer grado (una línea recta) como una aproximación. Un parábola con el mismo propósito.

La integral también se puede aproximar usando un conjunto de polinomios aplicados por pedazos a la función o datos, sobre segmentos de longitud constante. Por ejemplo, se puede usar tres segmentos de línea recta para aproximar la integral.

Aunque pueden utilizarse polinomios de grado superior con los mismos propósitos. Con este antecedente, reconocemos que el “método de barras” emplea un conjunto de polinomios de grado cero (es decir, constantes) para aproximar la integral.

Existen formas cerradas y abiertas de las fórmulas de Newton-Cotes. Las formas cerradas son aquellas donde se conocen los datos al inicio y al final de los límites de integración.

Las formas abiertas tienen límites de integración que se extienden más allá del intervalo de los datos. En este sentido, son similares a la extrapolación que se analizó en la sección anterior.

Por lo general, las formas abiertas de Newton-Cotes no se usan para integración definida. Sin embargo, se utilizan para evaluar integrales impropias y para obtener la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias.

En esta oportunidad se enfatiza las formas cerradas. No obstante, al final del mismo se presenta brevemente una introducción a las fórmulas abiertas de Newton-Cotes

Supongamos que nos interesa determinar ; los métodos en estudio lo realizan en general en dos pasos.

**Primero:** Dividir el intervalo [*a*, *b*] en “*n*” intervalos de igual magnitud en donde sus valores extremos son:

……..(\*)

**…**



h

h

h

h

h

**. . .**

*x*0

*x*1

*x*2

*x*3

*x*i

*x*i + 1

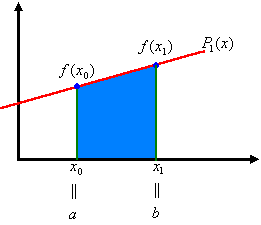
*a*

*b*

**Segundo:** Se aproxima *f* (*x*) por un polinomio de grado “*n*”, *Pn* (*x*) y se integra para obtener la aproximación

### 6.2.1 Método Trapezoidal

* 1. Este método de integración numérica se fundamenta en la integración de la fórmula de interpolación lineal.
  2. Que ocurre si *n* = 1, i.e., *x*0 =*a*, *x*1 = *b*, entonces la aproximación polinomial de *f* (*x*) es una línea recta, i.e., *P*1 (*x*).
  3. La aproximación a la integral es el área del trapezoide bajo la línea recta.



Área del trapecio con vértices

. (4)

* 1. Para realizar la integración , se requiere usar una de las representaciones del polinomio *P1* (*x*).
  2. Pero *f* (*x*) está dado para valores equidistantes de *x* con distancia *h,* la relación lógica es una de las fórmulas en diferencias divididas finitas (hacia delante, hacia atrás)
  3. Supongamos que elegimos las diferencias divididas finita hacia delante tendremos.

En nuestro caso:

, luego

Tenemos la integral

La integral de lado derecho debe estar en función de *s*, i.e.,

Para los límites de integración *x*0 y *x*1:

Luego:

*Luego tenemos*:

(4\*)

### Error de la regla del trapecio

Cuando empleamos la integral bajo un segmento de línea recta para aproximar la integral bajo una curva, obviamente se tiene un error que puede ser importante. Una estimación al error de truncamiento local para una sola aplicación de la regla del trapecio es.

. (5)

donde ξ está en algún lugar en el intervalo de . La ecuación (5) indica que si la función sujeta a integración es lineal, la regla del trapecio será exacta. De otra manera, para funciones con derivadas de segundo orden y de orden superior (es decir, con curvatura), puede ocurrir algún error.

Algoritmo del Método Trapezoidal

### *Ejemplo:*

Usar el método trapezoidal

* + 1. Aproximar el área A1 bajo la curva de la función dada por la tabla siguiente, en el intervalo *a* = 500, *b* = 1800

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Puntos | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| *f* (*x*) | 9 | 13 | 18 | 25 | 25 | 27 |
| *x* | 500 | 900 | 1400 | 1800 | 2000 | 2200 |

**b)** Aproximar: ; **c)** Aproximar:

**d)** Aproximar:; **e)** Aproximar:

***Solución:***

*A ) h* = 1800 – 500 = 1300 *; x*0 = 500 *, x*1= 1800

* + 1. *h* = 6 – 0 = 6 ; *x*0 = 0 , *x*1 = 6
    2. *h* = 4 - (-2) = 6 ; *x*0 = -2 , *x*1 = 4 : f (*x*) = 2 + 3*x* + 4*x*2

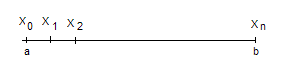
### 6.2.2 Método de Simpson.

Una forma de mejorar la precisión de la regla del trapecio consiste en dividir el intervalo de integración en varios segmentos, y aplicar el método a cada uno de ellos.

Las áreas de los segmentos se suman después para obtener la integral en todo el intervalo. Las ecuaciones resultantes se llaman fórmulas de integración, de aplicación múltiple o compuestas.

En forma general y la nomenclatura que usaremos para obtener integrales de aplicación múltiple. Hay n + 1 puntos igualmente espaciados . En consecuencia, existen n segmentos del mismo ancho:

Supongamos que el intervalo de integración es dividido en n subintervalos con longitudes iguales, i.e.,



.

Y el polinomio de interpolación es de grado *n,* es decir:

.

Entonces la aproximación de la integral estará dado por:

Qué ocurre si integramos los cinco primeros términos

Qué ocurre si *n* = 1

**.**

Pues:

,

**Método Trapezoidal**.

Que ocurre para *n* = 2

Pero:

**Simpson 1/3**

Si *n* = 3

**Simpson 3/8**

### Error de truncamiento,

Se tiene un error con la regla del trapecio de aplicación múltiple al sumar los errores

individuales de cada segmento, así

**, (6)**

donde es la segunda derivada en un punto , localizado en el segmento i. Este resultado se simplifica al estimar la media o valor promedio de la segunda derivada en todo el intervalo como,

**.**

**En consecuencia se tiene que,**

**. (6\*)**

### Ejemplo

Use la regla del trapecio con dos segmentos para estimar la integral de,

,

desde a = 0 hasta b = 0.8. Emplee la ecuación (6\*) para estimar el error. Recuerde que el valor correcto para la integral es 1.640533.

**Solución**

Para n=2 y con h=0.4. calculamos, f(0) = 0.2 f(0.4) = 2.456 f(0.8) = 0.232

Recordemos que,

**(est. Gen, tra,comp)**

**,**

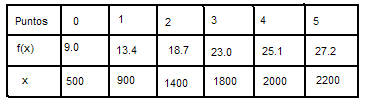
**.**

**,**

Donde -60 es el promedio de la segunda derivada.

### Ejemplos:

**(1)**





*f*(X1) se encuentra interpolando



**(2)**

Aproximar



**(3)** Aproximar



### 6.2.3 Métodos Compuestos de Integración

En ocasiones el intervalo de integración tiene una longitud grande, entonces resulta conveniente dividirlo en subintervalos y aproximar cada una por medio de un polinomio.

**Método Trapezoidal Compuesto**

f(x0)

f(x1)

f(X)

f(xn)

f(xn-1)

f(x2)

f(x)

X

X0

X1

f(x0)

f(x1)

f(X)

a

b









X



En vez de aproximar la integral de *f*(x) en [a,b] por una recta.

Conviene dividir [a, b] en *n* sub intervalos y aproximar la integral de *f*(x) en cada sub intervalo por un polinomio de primer grado como muestra la figura.

Aplicamos la fórmula Trapezoidal a cada sub intervalo y se obtiene el área del trapezoide de tal manera que la curva de todos ellos nos proporciona el área aproximada bajo la curva *f*(x).

Donde:

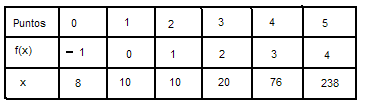
P*i*(x): es un polinomio de primer orden, i.e., la recta que pasa por (X*i-1*, *f*(X*i-1*)), (X*i*, *f*(X*i*)).

Ahora podemos aplicar el método del trapezoide entonces tenemos:

Qué ocurre si todos los intervalos tienen la misma longitud *h*, i.e., X*i+1* - X*i* = *hi*; *i*=0, 1,2,…,(n-1).

### 6.2.4 Ejercicios Resueltos

**1)** Usar el método trapezoidal compuesto para aproximar el área bajo la curva de la función dada por tabulación en *x* = -1 y x = 4



**Solución**

Observación:

1. Se aplicó cinco veces el método del trapezoide.

(2) h=1

.

**2)** Aplicar el método en análisis si *f*(x)=x4 – 2x2 + x + 10; x0= -1 ∧ xn =4; *h* = 1

### Algoritmo del método Trapezoidal

Para aproximar el área bajo la curva de una función analítica , en un intervalo , proporcionar la función por integrar ,

**Datos**, el número de trapecios N el límite inferior A y el límite superior B.

**Resultado,** el área requerida, aproximada, AREA.

**Paso 1. Hacer x=A,**

**Paso 2. Hacer s=0**

**Paso 3. Hacer ,**

**Paso 4. Si N=1, ir al paso10, caso contrario continuar**

**Paso 5. Hacer I=1**

**Paso 6. Mientras . Repetir los pasos 7 al 9,**

**Paso 7. X=X+h**

**Paso 8. Hacer**

**Paso 9. Hacer I=I+1**

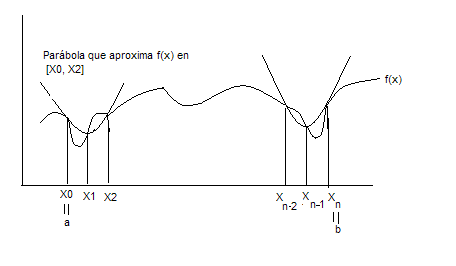
**Paso 10. Hace el )**

**Paso 11. Imprimir Área, y Terminar**

### Método Compuesto de Simpson

Recordemos que para aplicar el método de Simpson se necesita dos sub intervalos y como queremos aplicarlo *n*-veces entonces se debe dividir el intervalo [a, b] en un número de sub intervalos igual a 2*n*.

Veamos gráficamente esto:



Observamos que cada par de sub intervalos sucesivos aproximamos *f*(x) por un polinomio de segundo orden (parábola) y se integra usando el método de Simpson de tal manera que la suma de las áreas parciales nos proporcione el área total, es decir:

.

Donde P*i*; *i*=1,2,…; es el polinomio de grado dos que pasa por tres puntos consecutivos usando el método del Trapezoide.

Donde:

Si h1= h2=…= hn, entonces tenemos:

Luego:

3) Usando el método de Simpson compuesto, aproximar el área bajo la curva

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Puntos | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | 5 |
| X | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| F(x) | 8 | 10 | 10 | 20 | 76 | 238 |

\*) Aplicamos Simpson cuando *i=*0, 1, 2, 3, 4

\*) Aplico el método trapezoidal X4, X5

Luego:

4) Hallar la integral aproximada de entre -1 y 1

Usar el método trapezoidal compuesto compare el resultado con 0.682 obtenido de tablas.

**Solución:**

Con *n* = 1

.

El error relativo considerando el valor de la tabla ó 29%

Si *n* = 2 ⇒

ó 5.87%

Si *n* = 4

..

Ó 1.47%

**5)** Usar el método de Simpson varias veces y comparar el resultado con 0.682 valor obtenido por tabla considerando el ejercicio anterior.

**Solución:**

Si *n*=2

.

Ó 1.62%

Si *n =4* ⇒

,

Ó 0.15%

### Algoritmo del Método de Simpson Compuesto

Para aproximar el área bajo la curva de una función analítica f(x) en el intervalo , se debe de proporcionar la función de integración

Datos El número par de sub intervalos N el límite inferior A y Superior B

Resultados. Área aproximada.

Paso 1. Hacer S1=0

Paso 2. Hacer S2=0

Paso 3. Hacer X=A

Paso 4. Hacer

Paso 5. Si N=2, ir al paso 13 de otro modo continuar,

Paso 6. Hacer I=1

Paso 7. Mientras repetir los pasos 8 al 12

Paso 8. Hacer X=X+H

Paso 9. Hacer S1=SI+F(X)

Paso 10. Hacer X=X+H

Paso 11. Hacer S2=S2+F(X)

Paso 12. Hacer I=I+1

Paso 13. Hacer X=X+H

Paso 14. Hacer S1=S1+F(H)

Paso 15. Hacer

Paso 16. Imprimir área y terminar.

### 6.2.4 Extrapolación de Richardson e Integración de Romberg

Extrapolaciónde Richardson es un conjunto de técnicas que generan mejores aproximaciones a los resultados buscados o aproximaciones equivalentes a métodos de alto orden, a partir de las aproximaciones obtenidas con algún método de bajo orden y pocos cálculos. Estas técnicas están basadas en el análisis del error de truncamiento de la siguiente manera.

Supongamos que el error de truncamiento de cierto algoritmo de aproximación de la siguiente integral,

Se expresa,

,

Donde c es independiente de h. r es entero positivo y , es un punto desconocido de ,

Luego de obtener dos aproximaciones de la integral I, usar y , denotar a dichas aproximaciones y respectivamente y despreciar errores de redondeo, se puede escribir,

.

.

Estas dos últimas ecuaciones podemos dividirlo miembro a miembro y como y son prácticamente iguales, se tiene

,

de donde

, ,…(1)

si consideramos , tendremos que es equivalente a

….(2)

Este proceso, conocido como integración de Romberg, es efectivo cuando al variar bruscamente en , y no cambia de signo en dicho intervalo. En estos casos las dos ecuaciones últimas permiten obtener una mejor aproximación a I a partir de , y , sin repetir el proceso de integración y con cálculos breves. En el método trapezoidal, por ejemplo para r=2, y la ecuación última toma la forma de ,,…, (3)

Mara sistematizar la metodología en la aproximación trapezoidal denotamos por , las aproximaciones de I obtenidas empleando 2k trapezoides, con la finalidad de obtener mejores aproximaciones de I mediante , y , se aplica la extrapolación de Richardson

,…, (4)

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| k | Número de trapezoides 2k | Aproximación trapezoidal | Primera extrapolación | Segunda extrapolación |  |
| 0 | 1 |  |  |  |  |
| 1 | 2 |  |  |  |  |
| 2 | 4 |  |  |  |  |
| 3 | 8 |  |  |  |  |
| 4 | 16 |  |  |  |  |
| 5 | 32 |  |  |  |  |

Aplicación del método de Romberg.

El resultado de la ecuación (4), este resultado , se genera la columna cuatro del cuadro anterior. Estos valores sirven para producir una segunda extrapolación y obtener una mejor aproximaciónón de I con , llegando a.

,

Que se denota por , con la que se genera la quinta columna de la tabla este proceso puede continuar siempre que cada proceso corresponda al algoritmo.

, con , (5)

Cuando los valores de , al crecer k, los valores de la diagonal superior de la tabla convergen a I[[1]](#footnote-1).

**Ejemplo.**

Determinar la aproximación de la siguiente integral,

, usando 1,2,4,8, trapezoides.

Con los resultados obtenidos y con la relación (5 ) obtener mejores aproximaciones comparar los valores obtenidos con el valor calculado analíticamente, i e. 0.6366197.

**Solución**

Usando el método del trapecio compuesto construimos el siguiente cuadro.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| k | Número de trapezoides |  |
| 0 | 1 | 0.0 |
| 1 | 2 | 0.5 |
| 2 | 4 | 0.6035534 |
| 3 | 8 | 0.6284174 |
| 4 | 16 | 0.6345731 |

Obsérvese que , converge al valor analítico al aumentar k, pero emplear más subintervalos implica aumentar los errores de redondeo y un considerable incremento en el número de cálculos.

En cambio, si consideramos el modelo (5) con m=1 se obtiene se manera secuencial lo siguiente,

.

.

.

Observemos que con estos cálculos simple se obtienen mejores aproximaciones de la integral.

Si aplicamos el modelo para m=2 se obtiene se manera secuencial lo siguiente,

.

.

,

Si continuamos para m=3.

Completamos el siguiente cuadro.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| k |  |  |  |  |  |  |
| 0 | 1 | 0.0000000 |  |  |  |  |
| 1 | 2 | 0.5000000 | 0.6666667 |  |  |  |
| 2 | 4 | 0.6035534 | 0.6380712 | 0.6261648 |  |  |
| 3 | 8 | 0.6384174 | 0.6367054 | 0.6366143 | 0.6366214 |  |
| 4 | 16 | 0.6345731 | 0.6366250 | 0.6366196 | 0.6366197 | 0.6366197 |

El valor , es el valor analítico de la integral.

El método de Romberg puede emplearse sucesivamente hasta que dos elementos consecutivos de una fila , , coinciden hasta cierto decimal esto es,

.

Además puede generarse otra columna y y ver si.

.

Lo que evita la posibilidad de que dos elementos consecutivos de una fila coincida entre s+i pero no con el valor de la integral que se esta aproximando.

6.2. 5. Ejercicios y aplicaciones diversas propuestos

**I**. Determinar las integrales aproximadas usando los Métodos de Simpson, Trapezoidal simple y compuesto de:

**1. 2. 3. 5.**

**6. 7. , 8. 9.**

**10. 11. 12.**

**II. Hallar el área de la región limitada por:**

**1. y las rectas . 2. .**

**3. , y las rectas 4. .**

**5. . 6..**

**7. entre . 8..**

**9.. 10..**

**11.-. 12.- y el eje Y.**

**13.- . 14.-.**

**15.- . 16.**

**III. Calcular el volumen generado por la curva:**

**a) al rotar en torno al eje X**

**b) entre al rotar en trono del eje X**

**c) entre al rotar en trono del eje X**

**d) entre al rotar en trono del eje X**

**e) entre al rotar en trono del eje X**

## 6.3. Cuadratura de Gauss

Anteriormente estudiamos fórmulas de integración numérica o cuadratura conocidas como ecuaciones de Newton-Cotes. Una característica de estas fórmulas fue que la estimación de la integral se basó en valores igualmente espaciados de la función. En consecuencia, la localización de los puntos que se usaron en estas ecuaciones era predeterminados o fijos.

Por ejemplo, como se describe en la regla del trapecio se basa en obtener el área bajo la línea recta que une los valores de la función, en los extremos del intervalo de integración. La fórmula que se utiliza para calcular esta área es,

,

donde a y b son los límites de integración y b – a = el ancho del intervalo de integración. Debido a que la regla del trapecio necesita los puntos extremos, existen casos donde la fórmula puede dar un gran error.

Ahora, suponga que se elimina la restricción de los puntos fijos y se tuviera la libertad de evaluar el área bajo una línea recta que uniera dos puntos cualesquiera de la curva. Al ubicar esos puntos en forma inteligente, definiríamos una línea recta que equilibrara los errores negativo y positivo. Así que, llegaríamos a una mejor estimación de la integral.

Cuadratura de Gauss es el nombre de una clase de técnicas para realizar tal estrategia. Las fórmulas particulares de cuadratura de Gauss descritas en esta sección se denominan fórmulas de Gauss-Legendre. Antes de describir el procedimiento, mostraremos que las fórmulas de integración numérica, como la regla del trapecio, pueden obtenerse usando el método de coeficientes indeterminados. Este método se empleará después para desarrollar las fórmulas de Gauss-Legendre.

### 6.3.1. Método de coeficientes indeterminados

En la regla del trapecio obtuvimos el integrando un polinomio de interpolación lineal y mediante un razonamiento geométrico. El método de coeficientes indeterminados ofrece un tercer procedimiento que también tiene utilidad para encontrar otras técnicas de integración, como la cuadratura de Gauss.

Para ilustrar el procedimiento, del trapecio se expresa como,

, (1)

donde las c = constantes. Ahora observe que la regla del trapecio deberá dar resultados exactos cuando la función que se va a integrar es una constante o una línea recta. Dos ecuaciones simples que representan esos casos son y = 1, y = x. Ambas se ilustran en la figura a seguir. Así, las siguientes igualdades se deberán satisfacer:

, y

,

o, evaluando las integrales,

. y

son dos ecuaciones con dos incognitas que se resuelben para determinar

,

que al sustituírlo en (1) una formula equivalente a la del trapecio.

Y=1

Y=x

### 6.3.2 Sistematización General.

Así como en el caso anterior para la obtención de la regla del trapecio, el objetivo de la cuadratura de Gauss es determinar los coeficientes de una ecuación de la forma,

, (2)

donde las c = los coeficientes desconocidos. Sin embargo, a diferencia de la regla del trapecio que utiliza puntos extremos fijos a y b, los argumentos de la función x0 y x1 no están fijos en los extremos, sino que son incógnitas. De esta manera, ahora se tienen cuatro incógnitas que deben evaluarse y, en consecuencia, se requieren cuatro condiciones para determinarlas con exactitud.

x

Así, como con la regla del trapecio, es posible obtener dos de esas condiciones al suponer que la ecuación (2) ajusta con exactitud la integral de una constante y de una función lineal. Después, para tener las otras dos condiciones, sólo se ampliará este razonamiento al suponer que también ajusta la integral de una función parabólica y de una cúbica . Al hacerlo, se determinan las cuatro incógnitas y además se obtiene una fórmula de integración lineal de dos puntos que es exacta para cúbicas.

Las cuatro ecuaciones que habrá que resolver son:

,…,(3)

,…, (4)

,…,(5)

,…,(6)

Las ecuaciones (3) a (6) pueden resolverse simultáneamente para encontrar

,

que se sustituye en la ecuación (2) para obtener la fórmula de Gauss-Legendre de dos puntos,

,…, (7)

Así, llegamos al interesante resultado de que la simple suma de los valores de la función en genera una estimación de la integral que tiene una exactitud de tercer grado.

Observe que los límites de integración en las ecuaciones (3) a (6) son desde –1 a 1. Esto se hizo para simplificar la matemática y para hacer la formulación tan general como sea posible.

Sin embargo, es posible utilizar un simple cambio de variable para transformar otros límites de integración a esta forma.

Esto lo podemos realizar suponiendo que una nueva variable está relacionada con la variable original x en una forma lineal, como sigue,

*,* … (8)

Si el límite inferior, x = a, corresponde a , estos valores se sustituyen en la ecuación (8):

*,..(9)*

De manera análoga pata eñ l+imite superior y x=b.

*,…(10)*

Desarrollando las dos ultimas ecuaciones se tiene que,

, (11)

, (12)

considerando estos valores se tiene que en (8)

*, (13)*

diferenciando a esta ecuación tenemos,

(14)

Las ecuaciones (13) y (14) pueden sustituirse ahora por x y dx, respectivamente, en la ecuación que se habrá de integrar.

Tales sustituciones efectivamente transforman el intervalo de integración sin cambiar el valor de la integral.

### Ejemplo.

Veamos un ejemplo cómo se objetiva lo planteado en la práctica.

Utilizando la ecuación (7) evalúe la integral de,

,

entre los límites x = 0 y x = 0.8. Recuerde que éste fue el problema que resolvimos anteriormente usando las fórmulas de Newton-Cotes. El valor exacto de la integral es 1.640533.

**Solución.**

Antes de integrar la función, debemos realizar un cambio de variable para que los límites sean de –1 a +1.

Para ello, sustituimos a = 0 y b = 0.8 en la ecuación (13) para obtener

x = 0.4 + 0.4xd

La derivada de esta relación es la ecuación (14) es decir,

,

Ambas ecuaciones se sustituyen en la ecuación original para dar,

,

,

De esta manera, el lado derecho de la igualdad está en la forma adecuada para la evaluación mediante la cuadratura de Gauss.

La función transformada se evalúa en  que es igual a 0.516741 y en que es igual a 1.305837.

Por lo tanto, la integral, de acuerdo con la ecuación (7), se obtiene,

I ≅ 0.516741 + 1.305837 = 1.822578

que representa un error relativo porcentual de –11.1%.

El resultado es comparable en magnitud a la aplicación de la regla del trapecio de cuatro segmentos o a una aplicación simple de las reglas de Simpson 1/3 y 3/8 .

Se espera este último resultado ya que las reglas de Simpson son también de tercer grado de exactitud.

Observe que, debido a la elección inteligente de los puntos, la cuadratura de Gauss alcanza esta exactitud considerando tan sólo dos evaluaciones de la función.

### Análisis del error en la cuadratura de Gauss

El error en las fórmulas de Gauss-Legendre por lo general se especifica mediante[[2]](#footnote-2)

,…,(15)

donde n = el número de puntos menos uno y = la (2n + 2)-ésima derivada de la función, después del cambio de variable con ξ localizada en algún lugar en el intervalo desde –1 hasta 1.

Una comparación de la ecuación (15) indica la superioridad de la cuadratura de Gauss respecto a las fórmulas de Newton-Cotes, siempre que las derivadas de orden superior no aumenten sustancialmente cuando se incremente n.

Al final podemos decir que las fórmulas de Gauss-Legendre tienen un desempeño pobre. En tales situaciones, se prefieren la regla de Simpson de aplicación múltiple o la integración de Romberg.

No obstante, en muchas de las funciones encontradas en la práctica de la ingeniería, la cuadratura de Gauss proporciona un medio eficiente para la evaluación de las integrales.

Estructurar algoritmo

## 6.5. Diferenciación numérica

### 6.5.1. Sistematización General:

Ya se comentó sobre las operaciones que se pueden practicar sobre una función tabulada, el camino fue de aproximar la tabla o la función, por alguna función y efectuar la operación en la función aproximante. De esta manera se realiza en la integración numérica y así lo realizaremos en la diferenciación numérica. En nuestro caso diferenciamos el polinomio de aproximación Pn(x).

Veamos cómo se realiza esto, supongamos que la aproximación es polinomial, entonces la diferenciación numérica consiste en diferenciar la fórmula del polinomio interpelante que se utilizó , la aproximación de la primera derivada estará dado por

, en general

Pero

,

Dónde: es el error que se comete al aproximar por .

Supongamos que son los valores de las x que son espaciados igualmente luego Pn(x) se puede escribir en términos de diferencias finitas

,

Donde:

,

,

,

En nuestro caso:

.

Luego diferenciando

,

,.

Consideremos para:

*n* =1: Esto quiere decir que la aproximación P1(x) es una recta, i.e.

,

Es decir, la primera derivada de f(x) queda aproximada por,

,

Definitivamente como se esperaba,

### Observación:

* 1. En general equivale a tomar como primera derivada a la pendiente de la recta que pasa por dos puntos de la curva y .



* 1. La primera derivada de *f*(x) en todo intervalo [x0, x1] queda aproximada por el valor constante

, ezl valor de es muy diferente al de



* 1. Gráficamente:





X0

Aproximación lineal de la primera derivada.

Analicemos para *n* = 2; es decir aproximaremos *f*(x) por un polinomio P2(x) de grado 2.

.

.

Desarrollando las diferencias:









)

(

)

(

2

)

(

)

(

)

(

2

)

2

(

)

(

)

(

)

(

)

(

0

1

2

0

0

0

2

0

1

0

0

*x*

*f*

*x*

*f*

*x*

*f*

*x*

*f*

*h*

*x*

*f*

*h*

*x*

*f*

*x*

*f*

*h*

*x*

*f*

*x*

*f*

*h*

*x*

*f*

*h*

*x*

*f*

*x*

*f*































(1)

La segunda derivada puede calcularse derivando una vez más con respecto a *x*, o sea.

,

.

De la misma manera se puede calcular derivando para *n*>2.

El error cometido al aproximar por este dado por donde *R*n(x) es:



,

. (3)

Observemos que existe una estrecha relación entre las diferencias divididas y las derivadas en general esta relación está dada por:

Con perteneciente a (min. xi, máx. xi) con , esto quiere decir que es un valor de x desconocido del cual solo se sabe que se encuentra entre los valores menor y mayor del argumento. Se sustituye (3)



con

Donde se ha escrito como una función de x, ya que su valor depende del argumento x donde se desee evaluar la derivada.

, (4)

Puede considerarse,

, (5)

Como

, donde , es una función de x distinta de .

Por esto, la ecuación (4), puede escribirse como.

, (6)

Con,

,

En particular para , cuando x es una de la abscisa de f(x), el error de truncamiento dado por la ecuación (6) se simplifica, ya que

. Entonces,

, con , (7)

Por ejemplo, la ecuación (1) puede escribirse en términos del error como sigue,

.

O,

,…, (8)

con .

De la misma manera,

, …(9)

con .

Y

,… (10)

con

Obsérvese que el término del error para la derivada en , es la mitad del término del error para la derivada en , y . Esto es así porque en la primera derivada se utilizan valores de la función a ambos lados de

En la diferenciación numérica, el error de truncamiento puede ser muy grande si por ejemplo,

, y ,

Son de la misma magnitud, lo cual es común, el primer término de la ecuación (6) tiene aproximadamente la misma magnitud que el error de la interpolación, entonces puede decirse que el error de aproximación de la derivada es, generalmente , mayor que el error de interpolación en.,

.

Que es el segundo término dela ecuación (6) además, cuando , la ecuación (7) muestra que el error en la derivada en , tiene la misma forma que el error de interpolación, salvo que los polinomios factores sean distintos, este criterio también ocurre para derivadas de mayor orden.

### 6.5.2 ejemplos de aplicación resueltos

1) Dada la ecuación Donde si T =350 K, se obtiene la siguiente tabla:



|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| puntos | 0 | 1 | 2 | 3 |
| P(atm) | 13.782 | 12.577 | 11.565 | 10.704 |
| V(cm3) | 2000 | 2200 | 2400 | 2600 |

Calcular la derivada de p con respecto a v cuando v = 2300 cm3, y compárelo con el valor de las derivadas analíticas

Solución

Aplicando en los puntos v = 0; 1; y 2, tenemos y p(v) = f(x), v = 2300cm3

con h = 200



La derivada analítica es

005048

.

0

)

2300

(

)

10

6

.

3

(

2

)

8

.

42

2300

(

)

350

(

1

.

82

2

)

(

3

6

2

3

2























*x*

*v*

*a*

*b*

*v*

*RT*

*dv*

*dp*

Debemos destacar que la aproximación es muy buena puesto que el error relativo es de -0.24%,

2) Calcular la derivada de f(x) = cos x en y con h = 0.01 cuál es la respuesta y cuál es su grado de precisión



Solución



Se puede obtener una cota más precisa usando el hecho de que lo que induce a que no proporcione una cota superior de 0.0035355.



3) En una reacción química A +B, k productos la concentración del reactante A es una función de la presión P y la temperatura T. la siguiente tabla presenta la concentración de A en gmol /litro como función de estas dos variables

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| P(kg/cm2) | T(K)  273 300 325 360 | | | |
| 1 | 0.99 | 0.97 | 0.96 | 0.93 |
| 2 | 0.88 | 0.82 | 0.79 | 077 |
| 8 | 0.62 | 0.51 | 0.48 | 0.45 |
| 15 | 0.56 | 0.49 | 0.46 | 0.42 |
| 20 | 0.52 | 0.44 | 0.41 | 0.37 |

Calcular la variación de la concentración de A con la temperatura a P = 8 Kg./cm2  y T = 300K, usando un polinomio de segundo grado.

Solución

Lo que se pide la derivada de la concentración con respecto a la temperatura T valorado en T = 300 y p = 8 esto se puede evaluar usando la siguiente relación, que es resultado de la derivada del polinomio de Lagrange., se sugiere aplicar derivación logarítmica y se llegará a la relación siguiente.



en nuestro caso se tiene

, en esta relación debemos tener en consideración que f(x) representa la concentración de A y x a T de tal manera que al sustituir los tres puntos que se obtiene de la tabla tenemos,

4) Obtenga la primera y segunda derivada evaluadas en x = 1, para la siguiente tabulación

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| I | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| x | -1 | 0 | 2 | 5 | 10 |
| f(x) | 11 | 3 | 23 | 143 | 583 |

Solución

La tabulación siguiente representa las diferencias divididas

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| i | x | f(x) | Diferencias Divididas  Primeras Segundas | |
| 0 | -1 | 11 | -8 |  |
| 1 | 0 | 3 | 10 | 6 |
| 2 | 2 | 23 | 40 | 6 |
| 3 | 5 | 143 | 88 | 6 |
| 4 | 10 | 583 |  |  |

Debemos observar que un polinomio de según do grado puede representar exactamente la función, puesto que la segunda diferencia dividida es constante.

Podemos aplicar el Polinomio de Newton de segundo grado en diferencias divididas



Observemos que se podía también derivar directamente del polinomio antes de sustituir los valores de x0 y x1  esto es

, para la segunda derivada se obtiene



### 6.5.3. Algoritmo.

### 6.5.4. Ejercicios y aplicaciones propuestos

**1.- La siguiente tabulación representa el gasto instantáneo de petróleo crudo en un oleoducto en miles de libras por hora. El flujo se mide a intervalo de 12 minutos**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Hora** | **6:00** | **6:12** | **6:24** | **6:36** | **6:48** | **7:00** | **7:12** | **7:24** | **7:36** | **7:48** | **8:00** | **8:12** |
| **Gasto** | **6.2** | **6.0** | **5.9** | **5.9** | **6.2** | **6.4** | **6.5** | **6.8** | **6.9** | **7.1** | **7.3** | **6.9** |

Cuál es la cantidad de petróleo bombeado en 2 horas 12 minutos Calcule el gasto promedio en ese periodo.

2.- En el interior de un cilindro de aluminio se tiene una resistencia eléctrica que genera una temperatura T1 = 1200º F. En la superficie exterior del cilindro circula un fluido que mantiene su temperatura a T2 = 300º F. Calcular la cantidad de calor transferido al fluido por unidad de tiempo. Sabiendo que la altura del cilindro es de 12 pulgadas, con radio interno R1 2 pulgadas y radio externo R2 12 pulgadas. La conductividad térmica del aluminio varía con la temperatura según la tabla

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **kBTU/hr pie2(ºF/pie)** | **165** | **150** | **130** | **108** |
| **TºF** | **1200** | **900** | **600** | **300** |

Considere un régimen permanente y modelar el proceso con la ecuación de Fourier en donde:

q = representa el calor transferido

k = Es la conductividad térmica del aluminio en BTU/ hr pie2 (ºF/pie) que es función de T es decir k = f(T) en nuestro caso en forma tabular.

A = área de transferencia de calor en pie2

T = temperatura en ºF

R = distancia radial a partir del centro del cilindro en pies

3.- Determine el centro de masa de una lámina rectangular de 2π por π suponiendo que la densidad en un punto P(x,y) de la lámina esta dado por ,

4.- Encuentre la primera derivada numérica de x ex  en el punto x = 1, usando un polinomio de aproximación de segundo grado, estime el error cometido use la siguiente relación con h = 0.5

5.- Se tiene la representación tabular de la temperatura T en ºC de una salmuera como refrigerante y tiempo t minutos encuentre la velocidad de enfriamiento entre los tiempos t = 2.5 y t = 4 minutos. Use con t = x, h =1,

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| T | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| T | 93.1 | 85.9 | 78.8 | 75.1 | 69.8 | 66.7 |

Utilice la siguiente

6.- La siguiente data representa una muestra de medidas observadas en una curva de imantación del hierro, en ella x es el número de kilo líneas por cm2 , y la permeabilidad encuentre la permeabilidad máxima.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| X | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| **Y** | **1090** | **1175** | **1245** | **1295** | **1330** | **1340** | **1320** | **1250** |

**7.- Obtenga la segunda derivada evaluada en x =3.7, 4.5, para la función tabulada de la siguiente manera**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Puntos** | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
| **X** | **1** | **1.8** | **3** | **4.2** | **5** | **5.5** |
| **f(x)** | **3** | **4.34536** | **6.57735** | **8.88725** | **10.44721** | **13.39223** |

**Utilice el polinomio de Newton en diferencias divididas para aproximar f(x).**

**8.- Si tenemos la siguiente data**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **X** | **0.2** | **0.3** | **0.4** | **0.5** | **0.6** |
| **f(x)** | **0.24428** | **0.40496** | **0.59673** | **0.82436** | **1.09327** |
| **f’(x)** |  | **1.75482** | **2.08855** | **2.47308** |  |

**Determine el valor de la primera derivada para x = 0.3; 0.4 y 0.5 y compare con los valores analíticos dados en la data, utilice la siguiente**

**9.- En la tabla siguiente x es la distancia en metros que recorre una bala a lo largo de un cañón en t segundos. Determine la velocidad de dicha bala cuando x = 3**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **X** | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
| **T** | **0** | **0.0359** | **0.0493** | **0.0596** | **0.0700** | **0.0786** |

**10.- Mediante los métodos vistos en clase determine:**

**a) b) ; c) ; d)**

### 6.5.5. Ejercicios y aplicaciones diversas propuestos

**I. Determinar las integrales aproximadas usando los Métodos de Simpson, Trapezoidal simple y compuesto de:**

**1. 2. 3. 5.**

**6. 7. , 8. 9.**

**10. 11. 12.**

**II. Hallar el área de la región limitada por:**

**1. y las rectas . 2. .**

**3 . , y las rectas 4. .**

**5. . 6..**

**7. entre . 8..**

**9.. 10..**

**11.-. 12.- y el eje Y.**

**13.- . 14.-.**

**15.- . 16.**

**III. Calcular el volumen generado por la curva:**

**a) al rotar en torno al eje X**

**b) entre al rotar en trono del eje X**

**c) entre al rotar en trono del eje X**

**d) entre al rotar en trono del eje X**

**e) entre al rotar en trono del eje X**

# 6.6. Referencias Bibliografía

[1] David Kincaid, Ward Cheney, (1994) “Análisis Numérico, Las matemáticas del cálculo científico” Eddison Wesley Iberoamericana. México.

[2] Shoichiro Nakamura (1992) “Métodos Numéricos Aplicados con Software” Prentice-Hall Hispanoamerica, S.A México.

[3] Shoichiro Nakamura (1997) “Análisis Numérico y Visualización Gráfica con Matlab” Prentice-Hall Hispanoamerica, S.A México.

[4] Steven. C. Chapra; Raymond P. Canale (2006) “Métodos Numéricos para Ingenieros” Mc Graw Hill Interamericana. Quinta edición. México.

[5] Antonio N. Hurtado; Federico. D. Sanchez (2014) “Métodos Numéricos Aplicados a la Ingeniería” Grupo Editorial Patria. México.

1. Ralston, A. Introducción al análisis numérico . Limusa Willey S.A 1972 , pg. 149-152. [↑](#footnote-ref-1)
2. Carnahan y colaboradores, 1969 [↑](#footnote-ref-2)